Petre Năchilă

Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciții și probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VI-a

Ediția a IV-a revizuită și adăugită

Editura Nomina

Cuprins

Capitolul I
NUMERE NATURALE. DIVIZIBILITATE

1. Determinați două numere naturale a căror sumă este 733, iar suma răsturnatelor celor două numere este 337.

2. Determinați numărul perechilor de numere naturale $\overline{ab2}$ și $\overline{xy3}$ a căror sumă este egală cu suma răsturnatelor lor.

3. Scrieți ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere:
a) 10^2; b) 10^3; c) 10^{2n}; d) 10^{2n+1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Scrieți ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere:
a) 25^2; b) 25^3; c) 25^{2n}; d) 25^{2n+1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Determinați numărul cifrelor de 9 care apar în scrierea zecimală a următoarelor numere:
a) $3 \cdot (10^{30} - 1)$; b) $4 \cdot (10^{50} - 3)$; c) $5 \cdot (10^n - 1)$; d) $8 \cdot (10^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Determinați pătratele perfecte de forma:
a) $2^6 + 2^7 + 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $2^m + 2^{m+1} + 2^n$, $m \in \mathbb{N}^*$ fixat, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că: $100 < 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} < 400$.

8. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $2a + 3b + 4c = 29$; $5a + 4b + 3c = 34$. Determinați $(a + 5b + 9c)(c - a)$.

9. Determinați numerele naturale n, știind că împărțind pe n la 19 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 13, iar împărțind pe n la 13 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 19.

10. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $\overline{abbc} = \overline{abb} + \overline{ab} + a + 1773$.

11. Determinați numărul natural n de 5 cifre pentru care $\overline{6n} = 4 \cdot \overline{n6}$.

12. Determinați numerele $\overline{xy}$ știind că $\overline{xy} + \overline{yx} = k^2, k \in \mathbb{N}$.

13. Determinați sumele cifrelor numerelor:
a) $10^{20} + 10^{10} - 5$; b) $10^{2n} + 10^n - 5$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

14. Există numere naturale de 3 cifre mai mici de 3 ori decât răsturnatele lor?

15. Scrieți următoarele numere ca produs de două numere consecutive:
a) 111222; b) 1111122222; c) $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Determinați ultima cifră a numărului $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Demonstrați că există numere naturale nenule m, n și numere naturale de două cifre $\overline{ab}$ pentru care $\overline{mab} \cdot \overline{nab} = \overline{pab}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.

18. Determinați numerele $\overline{xy}$ (de două cifre) în cazurile:

a) $x + y = x^2$; b) $x + y = x^3$; c) $x + y = x^4$;
d) $x + y = y^2$; e) $x + y = y^3$; f) $x + y = y^4$.

19. Determinați numărul $\overline{xy}$ știind că $\left(\overline{xy}\right)^3$ este un număr de 4 cifre scris doar cu cifrele 1 și 3.

20. a) Determinați numerele:
$a = 8^{30} - 7 \cdot 8^{29} - 7 \cdot 8^{28} - \ldots - 7 \cdot 8 - 1$; $b = 9^{100} - 8 \cdot 9^{99} - 8 \cdot 9^{98} - \ldots - 8 \cdot 9 - 1$.
b) Generalizare.

21. Determinați trei numere naturale consecutive având produsul de forma $\overline{abacc}$.

22. Determinați numerele $\overline{abc}$ pentru care avem $a^{b+c} + a^b + a^c = 819$.

23. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Știind că numerele n și $5n$ au împreună un număr par de cifre, demonstrați că n conține cifra 1.

24. Aceeași problemă dacă cifra 5 este înlocuită cu una din cifrele 6, 7, 8 sau 9.

25. Fie a cifra nenulă și fie $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Determinați numărul $S(n) = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \ldots \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n\ cifre}$.
b) Determinați suma cifrelor numărului $S(n)$ pentru $n \leq 3$.

26. Determinați restul împărțirii numărului $n \in \mathbb{N}^*$ la 5 știind că $2n + 1$ și $3n + 1$ sunt pătrate diferite.

27. Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $a = 2^n + 4^k$ să fie pătrat perfect.

28. Fie $a, b, c, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = 13 \cdot 3^n$. Determinați numărul $A = (a + b - 2c)(a + c - 2b)(b + c - 2a)$.

29. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați cifrele a și b știind că numerele A și B sunt pătrate perfecte, unde: $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{aa\ldots a}_{n}$; $B = \underbrace{44\ldots4}_{2n} - \underbrace{bb\ldots b}_{n}$.

30. Determinați numărul perechilor (m, n) de numere naturale pentru care $13 < 2^m + 2^n \leq 49$.

31. Determinați al câtelea termen al șirului 5, 10, 15, 25, …, are suma cifrelor egală cu 36.

32. Determinați cel mai mare număr natural cu proprietatea că oricare două cifre vecine ale sale (luate în ordinea scrierii numărului de la stânga la dreapta) formează un număr divizibil cu 17.

33. Aceeași problemă dacă înlocuim 17 cu 13.

34. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați două numere naturale știind că împărțind unul din ele la celălalt se obține restul $n + 1$.

35. Aceeaşi problemă dacă suma numerelor este $4n + 3$ şi restul n.

36. a) Calculaţi suma: $9^{13} - 10 \cdot 9^{12} + 10 \cdot 9^{11} - 10 \cdot 9^{10} + \ldots + 10 \cdot 9 - 1$.
b) Generalizare.

37. a) Calculaţi suma: $65 \cdot 64 - 64 \cdot 63 + 63 \cdot 62 - \ldots + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1$.
b) Generalizare.

38. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi numerele naturale nenule distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a căror sumă este $\dfrac{n^2 + n + 4}{2}$.

39. Aceeaşi problemă dacă suma este $\dfrac{n^2 + n + 6}{2}$.

40. Fie a cifră, $a \geq 2$, $a \neq 7$ şi fie numărul $n = \underbrace{\overline{999...9a}}_{103 \text{ cifre}}$. Demonstraţi că n nu este număr prim.

41. Rezolvaţi ecuaţiile: a) $x + [x, 4] = 18$; b) $x + (x, 4) = 12$. Prin $[x, 4]$ şi $(x, 4)$ s-a notat c.m.m.m.c., respectiv c.m.m.d.c. al numerelor x şi 4.

42. Determinaţi $m, n \in \mathbb{N}$, ştiind că $4 \cdot 5^m = 5^n - 25$.

43. Determinaţi $m, n \in \mathbb{N}$, ştiind că $6 \cdot 3^m = 3^n - 81$.

44. a) Calculaţi următoarele sume: $S_n = 6 + 11 + 16 + 21 + \ldots + (5n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S'_m = 13 + 16 + 19 + \ldots + (3m + 10)$, $m \in \mathbb{N}^*$.
b) În ce condiţii avem $S'_m \geq S_n$.

45. Determinaţi restul împărţirii numărului $a_n = 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, la 5.

46. Determinaţi $m, n \in \mathbb{N}$, ştiind că numărul $a = 15^n - 16^m + 1$ este pătrat perfect.

47. Determinaţi $a, b, c, n \in \mathbb{N}$, ştiind că $4^a = x$, $4^b = x + 3$, $4^c = 3x + 13$.

48. Determinaţi numerele naturale de două cifre care au exact:
a) 4 divizori; b) 6 divizori; c) 8 divizori.

49. Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr de două cifre care are cel mai mare număr de divizori.

50. Determinaţi $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ştiind că $a^{b+c+d} + a^{b+c} + a^{c+d} + a^{b+d} + a^b + a^c + a^d = 764$.

51. Determinaţi numerele naturale două cifre a, b, c, de pentru care $(a, b) = 3$; $(b, c) = 7$; $(a, c) = 11$.

52. Determinaţi $a, b \in \mathbb{N}$, ştiind că $a \mid b + 1$ şi $b \mid a + 1$.

53. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a(a + 2)^n + (a + 2)^{2k}$ să fie pătrat perfect.

54. Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ şi numărul prim p, ştiind că $(7^n)^4 = p + 5764796$.

55. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem: $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1 \cdot n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + \ldots + n \cdot 1$.

56. Determinaţi numerele $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că numerele $2^{n+3} \cdot 5^n + 1$ sunt divizibile cu 81.

57. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați a și b, știind că: $a \cdot \underbrace{\overline{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{n} = \underbrace{\overline{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}}_{n}$.

58. Rezolvați în numere naturale ecuațiile:
a) $a^3 + a^2 + a + 1 = 2^b$;   b) $a^3 + a^2 + a + 1 = 4^b$.

59. Determinați numerele de forma $\overline{ababab...ab}$ de $2n$ cifre, $n \in \mathbb{N}^*$, care sunt divizibile cu 45.

60. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$ este produsul a două numere naturale consecutive.

61. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, numărul $\underbrace{22...2}_{n}\underbrace{33...3}_{n}\underbrace{11...1}_{n}$ are un divizor de $2n + 1$ cifre.

62. Rezolvați în numere naturale ecuațiile:
a) $xyz = xy + z$;   b) $x + y + z + xyz = xy + yz + zx + 2$.

63. Determinați $a \in \mathbb{N}$, $a \leq 14$, astfel încât $(10n + 3, 15n + a) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

64. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $m + 2 \mid n + 2$ și $n + 1 \mid m + 2$.

65. Determinați numerele $\overline{xyz}$ știind că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr de forma $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

66. Determinați numerele naturale n știind că $n + 2 \mid n + 7$ și că $3n + 2 \mid 6n + 15$.

67. Demonstrați că $10 \mid (n^2 + n^4 + n^6 + \ldots + n^{2000})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

68. Demonstrați că există cifra a astfel încât $9 \mid 2^{9n+a} \cdot 5^{3n+1} + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

69. Determinați cel mai mic număr care se poate scrie ca sumă de 2, 3, 4, 5, 6, 7 numere prime, cel puțin două diferite.

70. Determinați cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $27 \mid \underbrace{333...3}_{n}$.

71. Determinați numerele prime m și n, știind că $m^n - n^m = 1$.

72. Determinați numerele naturale n pentru care numerele $a = 2^{3n} + 2$ și $b = 7^n + 3$ sunt divizibile cu 10.

73. Determinați mulțimea $A = \{\overline{xyz} \mid (x^2 + y^2 + z^2) \mid 26\}$.

74. Suma divizorilor unui număr natural este cu 7 mai mare decât numărul. Determinați numărul.

75. Determinați $a \in \mathbb{N}^*$, știind că $13 \mid 170^{2n} + 170^n + a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

76. Demonstrați că există patru numere prime a căror sumă este tot un număr prim.

77. Determinați cel mai mic număr natural de 4 cifre care se descompune într-un produs de trei factori primi având suma 50.

78. Determinați cel mai mic număr natural care are exact:
a) 7 divizori naturali;   b) 8 divizori naturali;   c) 12 divizori naturali.

79. Determinați cel mai mic număr natural n de minim 3 cifre care este cub perfect, iar $\frac{n}{3}$ este pătrat perfect.

80. Suma cifrelor numărului natural x este y, iar suma cifrelor numărului y este z. Determinați x, dacă $x + y + z = 120$.

81. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că numărul $a = 3^n - 4^m + 1$ este pătrat perfect.

82. Rezolvați în numere naturale ecuația $5^n - 1 = m^2$.

83. Demonstrați că există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m!(m + 1)! = n!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \ldots \cdot n$.

84. Demonstrați că există numere $\overline{ab}$ cu proprietatea că sunt egale cu suma tuturor numerelor de la a la b inclusiv.

85. Se consideră un pătrat mare format din 25 pătrate mici în care se află numărul 0. Se ia un pătrat mare format din 16 pătrate mici alăturate și se mărește fiecare număr din fiecare pătrat mic cu 1. Se repetă operația de 20 ori cu același pătrat sau cu altele până când se obține pătratul alăturat. Să se completeze pătratul alăturat.

				4
9				
		13		

86. Rezolvați în numere naturale ecuația: $1! + 2! + \ldots + n! = m!$.

87. Rezolvați în numere naturale ecuația: $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$.

88. Un număr natural se mărește „emblematic” dacă este atât sumă a patru numere naturale consecutive, dar și sumă a cinci numere naturale consecutive. Determinați:

a) cel mai mic număr natural „emblematic”;

b) cel mai mare număr natural de 3 cifre, care este „emblematic”;

c) suma primelor 20 de numere „emblematice”.

89. Determinați toate numerele naturale care au un număr impar de divizori naturali.

90. Determinați numerele prime x, y, z pentru care $xy + yz + zx \geq xyz$.

91. Determinați mulțimea $A = \{\overline{abc} \mid \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 4k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$.

92. Determinați numerele prime $\overline{abc}$ având $a \cdot b \cdot c = 252$.

93. Determinați numerele de patru cifre sau cinci cifre, care sunt simultan pătrate perfecte și cuburi perfecte.

94. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați câte un divizor de $2n + 1$ cifre ale numerelor $a = \underbrace{222...2}_{n}5\underbrace{333...3}_{n-1}7\underbrace{444...4}_{n}$; $b = \underbrace{333...3}_{n}8\underbrace{555...5}_{n}9\underbrace{444...4}_{n}$.

95. Demonstrați că oricum am alege 5 numere prime impare, există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 12.

96. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât numerele $4^n - 1$ și $4^n + 1$ să fie simultan prime.

97. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât numerele $6^n - 1$ și $6^n + 1$ să fie simultan prime.

98. Determinați numerele prime distincte și minime a, b, c știind că mediile aritmetice a câte două dintre ele și $a + b + c$ sunt tot numere prime.

99. Fie $S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n$. Demonstrați că există o infinitate de numere n pentru care S_n se divide cu 7 numere pare consecutive.

100. Determinați mulțimea: $A = \{\overline{xyz} \mid \overline{xy}(y+z) = \overline{yz}(x+y), x \neq y \neq z\}$.

101. Sumele și produsele următoare au câte n termeni, respectiv factori, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Precizați dacă:
a) $(3 + 3 + \ldots + 3)^2 + (4 + 4 + \ldots + 4)^2 = (5 + 5 + \ldots + 5)^2$;
b) $(5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5)^2 + (12 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 12)^2 = (13 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 13)^2$.

102. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $5^{m+1} + 3 = 2(5^n - 5^m)$.

103. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că numărul $a = \dfrac{n^2 + n}{2} - 1$ este număr prim.

104. Fie $a = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
a) Știind că a este număr prim, demonstrați că n este număr prim.
b) Reciproca este adevărată?

105. Determinați $x, y, z \in \mathbb{N}$, știind că $x^{y^z} = 16$.

106. Determinați numerele prime a, b, c, x, y pentru care $a = b + c = x - y$.

107. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele $\overline{xyz} = m$ pentru care avem:
$m + m \cdot 2 + m \cdot 2^2 + \ldots + m \cdot 2^n = 199 \cdot 1023$.

108. Fie $a > 5$ număr prim și fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $10 \mid a^n - 1$.

109. Rezolvați ecuațiile: a) $x + [x,6] = 48$; b) $x + (x,6) = 24$.

110. Determinați $p \in \mathbb{N}$, știind că elementele mulțimii A sunt numere prime, unde: $A = \{p, 2p - 1, 2p + 1, 2p^2 + 1, 2p^3 + 1\}$.

111. Determinați numerele naturale p și n, știind că p, $p + 3^n$, $p + 3^{n+1}$, $p + 3^{n+2}$, $p + 3^{n+3}$ sunt numere prime.

112. Fie $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați media aritmetică a numerelor S_1, S_2, …, S_n.

113. Fie $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați media aritmetică a numerelor $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.

114. a) Determinați sumele: $S_n = 10 + 17 + 24 + \ldots + (7n + 3)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S'_m = 31 + 34 + 37 + \ldots + (3m + 28)$, $m \in \mathbb{N}^*$.
b) În ce condiții avem $S_n \geq S'_m$?

115. Fie $S_n = 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinați restul împărțirii lui S_n la 4.

116. Determinați $A - B$, unde $A = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; $B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + (n - 1)(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

117. Determinați cel mai mare număr natural n format din cifre distincte diferite de 1, prime între ele care divid numărul n.

118. Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $(x, y) + [x, y] = 2x + y$ atunci $5 \mid x + y$.

119. Se consideră șirul $1 + 3 + 5$; $5 + 7 + 9$; $9 + 11 + 13$, ... Determinați al 2000-lea termen al șirului.

120. Determinați $m, n, p, x \in \mathbb{N}$, știind că $3^m = x$, $3^n = x + 2$, $3^p = x + 8$.

121. a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că suma cifrelor lui 5^n este 8.
b) Dar dacă suma cifrelor lui 6^n este 9?

122. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculați suma: $S_n = (2n + 2) + (2n + 1) - (2n) - (2n - 1) + (2n - 2) + (2n - 3) - (2n - 4) - (2n - 5) + \ldots$.

123. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$. Determinați numărul: $2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n^2$.

124. Se consideră următorul tabel de numere naturale:

1	1	2	2	2	3	3	4	4	4				100
2	2	2	2	1	4	4	4	4	3				99

a) Determinați regulile de completare ale celor două linii ale tabelului.
b) Determinați numărul de coloane ale tabelului.
c) Determinați diferența dintre sumele numerelor scrise pe cele două linii.
d) Câte coloane are tabelul dacă diferența este 30? Dar dacă diferența este 98?

125. Completați tabelul de mai jos, știind că suma numerelor din oricare patru căsuțe alăturate este 25:

	5							4							10

126. Al câtelea termen al șirului 5, 10, 15, 25, ... are suma cifrelor egală cu 45?

127. Determinați cel mai mic număr prim care se poate scrie ca sumă de 2, 3, 4, 5, 6, 7 numere prime.

128. Fie $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că:
a) $63 \mid 8^{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1$;
b) $9999 \mid 100^{(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)} - 1$.

129. Se consideră următorul tabel de numere:

1						
2	3	4				
5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16

....

a) Pe ce rând se află numărul 100?
b) Pe ce rând se află numărul 200 și al câtelea număr pe acel rând este numărul 200?
c) Determinați suma tuturor numerelor de pe rândul pe care se află numărul 500.

130. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există două mulțimi de numere având n, respectiv $n + 1$ elemente numere naturale consecutive, iar sumele numerelor din cele două mulțimi sunt egale.

131. Determinați numerele prime a și b, știind că $a + b = r^{n+1}$ și $a - b = r^n$, unde r este număr prim, iar $n \in \mathbb{N}$.

132. Determinați trei triplete de numere prime (a, b, c), știind că $a + b + c + 1$ este număr prim.

133. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n^5 + 1 = \overline{aaaa}$.

134. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $m + n$, $2^m + n$, $2^n + m$ sunt numere prime.

135. Determinați numărul natural $\overline{xyz}$ cu $y = x + z$, care are un număr maxim de divizori.

136. Numărul $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este produsul a două numere naturale consecutive. Demonstrați că numărul $B = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 25}$ este pătrat perfect.

137. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $m(n - 2) = n^3$.

138. Determinați $a, b \in \mathbb{N}$, știind că:

$[a - 2, b - 2] = 120$; $(a - 2, b - 2) = 10$;

$[a + 8, b + 8] = 200$; $(a + 8, b + 8) = 10$.

139. Demonstrați că există o infinitate de triplete (a, b, c) formate din numere prime mai mari sau egale cu 5 pentru care $3 \mid a + b + c$.

140. Determinați numerele naturale a, b, c, știind că $a^b \cdot c^a = 1000 + 1 + 2 + 3 + ... + 2000$.

141. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $a^{a-1} = \overline{bca}$.

142. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există cifrele a, b, c nenule, astfel încât $3 \mid (a^{2n+1} \cdot b^{2n+3} - c)$.

143. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a \cdot (a + 2)^n + (a + 2)^{2k}$ să fie pătrat perfect.

144. Determinați numerele $\overline{abc}$ și $\overline{xy}$, știind că $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 2^{\overline{xy}} + 53$.

145. Determinați numerele naturale a, b, c, n, pentru care:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = 25 + 1.$$

146. Determinați numerele naturale x și y, știind că $x^{2y} = 650 - x^y$.

147. Determinați cel mai mare număr folosind:

a) 3 cifre de 2; b) 3 cifre de 4; c) 3 cifre de 9.

148. Suma divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ este:

$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

149. Dacă $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt toți divizorii naturali ai numărului a avem:

$$(d_1 d_2 \ldots d_n)^2 = a^n.$$

150. Demonstrați că $30 \mid (3^{4a+b} - 3^b)$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.